

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 20 Απριλίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου, σχολικό βιβλίο, σελίδα 83.

A2. Ορισμός παραβολής, σχολικό βιβλίο, σελίδα 89.

A3. α) Λάθος.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $x^2 \geq 0$ οπότε από την εξίσωση της παραβολής $x^2 = 2\rho y$ προκύπτει $2\rho y \geq 0$. Εφόσον $\rho < 0$ και $y \neq 0$ πρέπει $y < 0$ άρα τα σημεία $M(x, y), y < 0$ της παραβολής θα βρίσκονται στα 3^ο, 4^ο τεταρτημόριο και όχι στα 1^ο, 2^ο του καρτεσιανού συστήματος αξόνων xOy .

A4. 1. Σωστό

2. Λάθος

3. Λάθος

4. Σωστό

5. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. α) Έχουμε $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) = -3 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3 \Leftrightarrow$

$$|\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3 \Leftrightarrow 3 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3.$$

Για το $|\vec{\beta}|$ έχουμε: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin 120^\circ = -3 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{3} \cdot |\vec{\beta}| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = \frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}.$$

β) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της παραβολής παίρνουμε:

$$y^2 = -4\vec{\alpha}\vec{\beta} \cdot x \text{ ή } y^2 = 12 \cdot x \text{ οπότε } 2p = 12 \Leftrightarrow p = 6.$$

Άρα $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (3, 0)$ και η διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2} \Leftrightarrow x = -3$.

B2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο $A(1, 2\sqrt{3})$ είναι

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1) \text{ ή } y \cdot 2\sqrt{3} = 6 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{3}}(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda = \sqrt{3}$ οπότε, αν ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ θα έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$ και $\omega = 60^\circ$.

B3. Για $y = 0$ έχουμε $0 = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = -1$. Άρα $B(-1, 0)$.

Ακόμη $A(1, 2\sqrt{3})$ και $E(3, 0)$ οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(1+1)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$(AE) = \sqrt{(3-1)^2 + (2\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$(BE) = \sqrt{(3+1)^2 + 0} = 4$$

Αφού $(AB)=(AE)=(BE)$ το τρίγωνο AEB είναι ισόπλευρο.

B4. Η ευθεία OA διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $A(1, 2\sqrt{3})$ άρα $y = a \cdot x$ ή $2\sqrt{3} = a \cdot 1 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

$$\text{Άρα } (OA): y = 2\sqrt{3} \cdot x.$$

$$\text{Για το σημείο } \Gamma: \begin{cases} y = 2\sqrt{3} \cdot x \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6\sqrt{3} \end{cases} \text{ Άρα } \Gamma(-3, -6\sqrt{3}) \text{ και}$$

$$\lambda_{\Gamma E} = \frac{y_E - y_\Gamma}{x_E - x_\Gamma} = \frac{-6\sqrt{3} - 0}{3 - (-3)} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Επειδή } \lambda_\epsilon = \sqrt{3} \text{ έχουμε } (\epsilon) // \Gamma E.$$

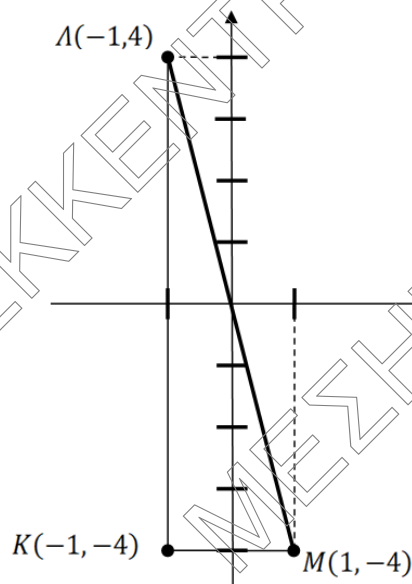
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για το σημείο $K: \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -5 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}.$

$$\text{Άρα } K(-1, -4), \text{ οπότε } \Lambda(-1, 4) \text{ και } M(1, -4).$$

$$\text{Για την εξίσωση της ευθείας } \Lambda M: \lambda_{\Lambda M} = \frac{-4 - 4}{1 - (-1)} = -4 \text{ οπότε}$$

$$y - 4 = -4 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = -4x.$$



$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot v = \frac{1}{2} \cdot (KM) \cdot (K\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8 \text{ τμ.}$$

$$(\text{Εναλλακτικά } E = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{K\Lambda})| = \dots = 8 \text{ τμ.})$$

- Γ2.** Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (-1, -3)$, $\vec{\delta}_2 = (1, -2)$ παράλληλα προς τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. Η οξεία γωνία φ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ οπότε :

$$\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = |\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2| \cdot \sin(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) \Leftrightarrow$$

$$-1 + 6 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) \Leftrightarrow \sin(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\sin(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{\varphi} = 45^\circ.$$

- Γ3.** Για $y = 0$ στην ε_2 : $2x + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Άρα $\Gamma(-3, 0)$.

Έστω $A(x_0, y_0)$ ζητούμενο σημείο. Αφού A σημείο της ε_1 θα ισχύει

$$3x_0 - y_0 = 1 \quad (1)$$

Επίσης τα σημεία Γ, Λ, A είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Lambda} // \overrightarrow{\Gamma A} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma A}) = 0$

Όμως $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = (-1 - (-3), 4 - 0) = (2, 4)$ και

$$\overrightarrow{\Gamma A} = (x_0 + 3, y_0 - 0) = (x_0 + 3, y_0)$$

$$\text{Άρα } \det(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma A}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x_0 + 3 & y_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y_0 - 4x_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x_0 + y_0 = 6 \quad (2)$$

$$\text{Οι (1) και (2) δίνουν: } \begin{cases} 3x_0 - y_0 = 1 \\ -2x_0 + y_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ y_0 = 20 \end{cases}$$

Άρα $A(7, 20)$.

Γ4. Το $M(x, y)$ είναι σημείο της ε_1 ή $\varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$$3x - y - 1 = 0 \text{ ή } 2x + y + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3x - y - 1) \cdot (2x + y + 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 + 3xy + 18x - 2xy - y^2 - 6y - 2x - y - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 - y^2 + xy + 16x - 7y - 6 = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x^2 + y^2 + (\lambda + 6)x + (3\lambda + 4)y + 3 - \lambda = 0$ (1)

Έχουμε $A = \lambda + 6, B = 3\lambda + 4, \Gamma = 3 - \lambda$ και

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 6)^2 + (3\lambda + 4)^2 - 4(3 - \lambda) =$$

$$= \lambda^2 + 12\lambda + 36 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 16 - 12 + 4\lambda =$$

$$= 10\lambda^2 + 40\lambda + 40 = 10(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 10(\lambda + 2)^2$$

Για $\lambda \neq -2$ είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ άρα για $\lambda \neq -2$ παριστάνει κύκλο

με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \left(-\frac{\lambda+6}{2}, -\frac{3\lambda+4}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{10(\lambda+2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot |\lambda+2|}{2}$$

Θέτοντας στην (1): $x = -2$ και $y = 1$ έχουμε

$$(-2)^2 + 1^2 + (\lambda + 6)(-2) + (3\lambda + 4) \cdot 1 + 3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2\lambda - 12 + 3\lambda + 4 + 3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Άρα το σημείο $A(-2, 1)$ είναι κοινό σημείο των κύκλων (1).

Δ2. Τα κέντρα των κύκλων είναι $K\left(-\frac{\lambda+6}{2}, -\frac{3\lambda+4}{2}\right), \lambda \neq -2.$

Έχουμε $x = -\frac{\lambda+6}{2}$ και $y = -\frac{3\lambda+4}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\lambda - 6 \\ y = -\frac{3\lambda+4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x - 6 \\ y = -\frac{3(-2x-6)+4}{2} \end{cases}$$

Άρα $y = -\frac{-6x-18+4}{2}$ ή $y = 3x + 7.$

Όμως $\lambda \neq -2$ άρα $-2x - 6 \neq -2 \Leftrightarrow -2x \neq 4 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Για $x = -2$ παίρνουμε $y = 3(-2) + 7 \Leftrightarrow y = 1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι τα σημεία της ευθείας $y = 3x + 7$ εκτός του σημείου της $A(-2,1)$.

Δ3. Η ευθεία (ζ) εφάπτεται σε κύκλο που ορίζει η (1) $\Leftrightarrow d(K, \zeta) = \rho$ (2).

$$\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 7 \Leftrightarrow 3y = -x + 21 \Leftrightarrow x + 3y - 21 = 0$$

$$\text{Το } K\left(-\frac{\lambda+6}{2}, -\frac{3\lambda+4}{2}\right), \rho = \frac{\sqrt{10} \cdot |\lambda+2|}{2} \text{ οπότε}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{\lambda+6}{2} + 3\left(-\frac{3\lambda+4}{2}\right) - 21\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{10} |\lambda+2|}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{-\lambda - 6 - 9\lambda - 12 - 42}{2}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10} \cdot |\lambda+2|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-10\lambda - 60|}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10} |\lambda+2|}{2} \Leftrightarrow 10|\lambda+6| = 10|\lambda+2| \Leftrightarrow$$

$$\lambda + 6 = \lambda + 2 \text{ ή } \lambda + 6 = -\lambda - 2 \Leftrightarrow \text{αδύνατη ή } \lambda = -4.$$

Για $\lambda = -4$ έχουμε $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ με $K(-1,4)$ και $\rho = \sqrt{10}$.

Δ4. Έστω $M(\alpha, 0)$ σημείο του $x'x$ άξονα. Η μέγιστη απόσταση του M από σημείο του C_1 είναι

$$d_{\max} = (KM) + \rho = \sqrt{(a+1)^2 + (4-0)^2} + \sqrt{10} = \sqrt{(a+1)^2 + 16} + \sqrt{10}$$

$$\text{Οπότε } d_{\max} > 5 + \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(a+1)^2 + 16} + \sqrt{10} > 5 + \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + 16 > 25 \Leftrightarrow (a+1)^2 > 9 \Leftrightarrow |a+1| > 3$$

$$\Leftrightarrow a+1 > 3 \text{ ή } a+1 < -3 \Leftrightarrow a > 2 \text{ ή } a < -4$$

Άρα τα σημεία $M(\alpha, 0)$ του $x'x$ άξονα θα έχουν τετμημένη

$$\alpha \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty).$$